

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελίδα 186

A2. Σχολικό σελίδα 76

A3. Σχολικό σελίδα 161

A4. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική με:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$$

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$, εσωτερικό σημείο του $A_f = \mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη στο x_0 από θεώρημα του Fermat θα ισχύει:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot a \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 12 + 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = -12 \Leftrightarrow a = -6$$

B2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\alpha = 1, \beta = -4, \gamma = 3 \Delta = 16 - 12 = 4 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

Η f γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$

Η f γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

Στο $A_1 = (0, 1]$ f γνησίως αύξουσα

Και $f(A_1) = (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1)]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -3$$

$$f(1) = 1 - 6 + 9 - 3 = 1$$

$$\text{Άρα } f(A_1) = (-3, 1]$$

Στο $A_2 = (1, 3)$ f γνησίως φθίνουσα

$$\text{Και } f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-3, 1)$$

Στο $A_3 = [3, +\infty)$ f γνησίως αύξουσα

$$\text{Και } f(A_3) = [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$$

$$f(3) = 27 - 54 + 27 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\text{Άρα } f(A_3) = [-3, +\infty)$$

Στο $A_1 = (0, 1]$ η f είναι συνεχής και $0 \in f(A_1) = (-3, 1]$

Άρα υπάρχει $x_0 \in A_1 : f(x_0) = 0$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο A_1 , το x_0 είναι μοναδικό

Στο $A_2 = (1, 3)$ η f είναι συνεχής και $0 \in f(A_2) = (-3, 1)$

Άρα υπάρχει $x_1 \in A_2 : f(x_1) = 0$ και επειδή f γνησίως φθίνουσα στο A_2 , το x_1 είναι μοναδικό

Στο $A_3 = [3, +\infty)$ η f είναι συνεχής και $0 \in f(A_3) = [-3, +\infty)$

Άρα υπάρχει $x_2 \in A_3 : f(x_2) = 0$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο A_3 , το x_2 είναι μοναδικό

Επίσης f πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού, συνεπώς έχει το πολύ 3 ρίζες

Άρα τελικά η f έχει 3 θετικές ρίζες τις x_0, x_1, x_2

B3.

Για $\alpha = -6$ έχουμε $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ και

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	— +		
$f(x)$	 		

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$

Η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$

Η f έχει σημείο καμπής το $\Gamma(2, f(2))$

$$f(2) = 8 - 24 + 18 - 3 = -1$$

Άρα $\Gamma(2, -1)$

B4. $g(x) = x + f(x)$

$$g'(x) = 1 + f'(x)$$

Έστω $(\varepsilon_1): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$

Σημείο τομής (ε_1) με $y'y$:

$$\text{Για } x = 0 : y - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Rightarrow y = -\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi) \quad (1)$$

Έστω $(\varepsilon_2) : y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$ η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $B(\xi, f(\xi))$,

Σημείο τομής (ε_2) με $y'y$:

$$\text{Για } x = 0 : y - g(\xi) = g'(\xi)(0 - \xi) \Rightarrow y = -\xi \cdot g'(\xi) + g(\xi) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Από (2):} \quad & \begin{aligned} g(\xi) &= \xi + f(\xi) \\ \Rightarrow y &= -\xi \cdot (1 + f'(\xi)) + \xi + f(\xi) = -\xi - \xi \cdot f'(\xi) + \xi + f(\xi) \\ g'(\xi) &= 1 + f'(\xi) \end{aligned} \\ & = -\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi) = \quad (1) \end{aligned}$$

Άρα οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο του $y'y$ $\Delta(0, -\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi))$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln x \ln x}} \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}, x > 0$$

Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών, οπότε:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x)e^{\ln^2 x} - F(x)e^{\ln^2 x} (\ln^2 x)'}{(e^{\ln^2 x})^2} = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{x^{\ln x} \left[F'(x) - F(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x} \right]}{(x^{\ln x})^2} = \\ &= \frac{x^{\ln x} [x \cdot f'(x) - 2 \ln x F(x)]}{x \cdot (x^{\ln x})^2} = \end{aligned}$$

Για κάθε $x > 0$. Άρα $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}, x > 0$ σταθερή.

$\Delta 2. i)$ Από $x \cdot f(x) = 2F(x) \ln x, x > 0$ για $x=1$, έχουμε $f(1)=0$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{0}{0}}{\frac{x-1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\ln x} \quad (1)$$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2$, (από υπόθεση αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στην $y = 2x$)

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{0}{0}}{\frac{x}{x-1}} = 1$$

$$\text{Άρα } (1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}} = \frac{2}{1} = 2$$

$ii)$ Ισχύει $x \cdot f(x) = 2F(x) \ln x, x > 0$

$$\text{για } x \neq 1 \text{ ισχύει: } F(x) = \frac{x \cdot f(x)}{2 \ln x} = \frac{x}{2} \frac{f(x)}{\ln x}$$

και επειδή υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2$

τότε: υπάρχει $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Η F όμως είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, αφού η F είναι παραγωγίσιμη, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = F(1) = 1$.

Αφού $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c, x > 0$ τότε:

$$F(x) = c \cdot x^{\ln x}, x > 0 \Rightarrow F(1) = c = 1$$

Άρα $F(x) = x^{\ln x}, x > 0$

Δ3. $F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}, x > 0$

$$F'(x) = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = e^{\ln^2 x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}$$

Ισχύει: $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Επίσης $F'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\ln^2 x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Αφού $e^{\ln^2 x} > 0$ και $x > 0$. Άρα:

	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	-	0	+
F		1	

ολ. ελάχ.

Για την εξίσωση: $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ (I) στο $(0, +\infty)$.

Μια προφανής ρίζα είναι η $x = 1$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλη ρίζα στο $(0, +\infty)$. Πράγματι για $x > 1$

ισχύει $x^2 > x$ f είναι γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

Αλλά $-(x-1)^2 < 0$ για $x > 1$. Άρα η εξίσωση (I) δεν έχει λύσει στο $(0, +\infty)$. Ομοίως για $x < 1$ ισχύει

$$x^2 < x \quad \overset{f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} \quad F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$$

Αλλά $-(x-1)^2 < 0$ για $x < 1$. Άρα πάλι αδύνατη.

Άρα η μοναδική λύση είναι η $x=1$.

$$\Delta 4. E = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx \quad (I)$$

Αλλά ισχύει $e^x \geq x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα: $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$, για κάθε $x > 0$

Και επειδή δεν ισχύει παντού η παραπάνω ισότητα, έχουμε:

$$(I) \Rightarrow E > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx \quad (A)$$

$$\text{Ισχύει } \int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e x' \ln^2 x dx = \left[x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \left[e \ln^2 e - 1 \ln^2 1 \right] - 2 \int_1^e \ln x dx =$$

$$= e - 2 \int_1^e x' \ln x dx = e - 2 \left(\left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = e - 2 \left(e \ln e - 1 \ln 1 - \left[x \right]_1^e \right) = e - 2(e - (e-1)) =$$

$$= e - 2(e - e + 1) = e - 2 \quad (B)$$

$$\text{Επίσης } E = \int_1^e 1 dx = \left[x \right]_1^e = e - 1 \quad (Γ)$$

Από A, B, Γ ισχύει $E > e - 2 + e - 1 = 2e - 3$