

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελίδα 93

A2. Σχολικό σελίδα 16

A3.

- α. Λάθος
- β. Σωστό
- γ. Σωστό
- δ. Σωστό
- ε. Λάθος

A4.

- α. $(c)' = 0$
- β. $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

B1.

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	

$$B2. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i}{n} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6}{50} = \frac{15 + 22 + 24 + 24}{50} = \frac{85}{50} = 1,7$$

B3. Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων $n = 50$ είναι άρτιος, η διάμεσος είναι :

$$\delta = \frac{\frac{t_{25}+t_{26}}{2}+1}{2} = \frac{t_{25}+t_{26}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

B4.

α. Το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες είναι :

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 20 + 30 + 22 + 16 = 88\%$$

β. Έστω Y η νέα μεταβλητή. Τότε :

$$Y_i = X_i + 4$$

$$\text{Άρα } \bar{Y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + a$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x \geq 0 \Leftrightarrow 6x(2-x) \geq 0$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$6x$				
$2-x$				
$f'(x)$				
$f(x)$				

$6x$	—	+	+
$2-x$	+	+	—
$f'(x)$	—	+	—
$f(x)$			

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

Γ2. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = a$

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = 2$ το $f(2) = -16 + 24 + a = 8 + a$

$$\text{Έχουμε } \frac{f(0)+f(2)}{2} = -8 \Rightarrow \frac{a+8+a}{2} = -8 \Rightarrow a+4 = -8a \Rightarrow a = -12$$

Γ3. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x$$

Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

$$\text{στο } M(1, f(1)) = (1, -8)$$

$$f(1) = -2 + 6 - 12 = -8$$

$$\lambda = f'(1) = -6 + 12 = 6$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon): y = 6x + \beta$$

Αφού $M(1, -8) \in (\varepsilon)$ έχουμε :

$$-8 = 6 \cdot 1 + \beta \Rightarrow \beta = -14$$

$$\text{Τελικά } (\varepsilon): y = 6x - 14$$

$$\Gamma 4. x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \xrightarrow{\cdot(-2)} -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \xrightarrow{-4} -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Rightarrow f(x) \leq f(2)$$

που ισχύει για κάθε $x \in [2, +\infty)$ αφού το $A(2, f(2))$ είναι μέγιστο.

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2\lambda \cdot 1 + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

$$\Delta 2. f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 8x + 7$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 7$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$				



Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[7, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$

$$\Delta 3. 2025 > 2020 \quad \begin{matrix} 2020, 2025 \in [7, +\infty) \\ \Leftrightarrow \\ f \text{ γνησίως αύξουσα στο } [7, +\infty) \end{matrix}$$

$$f(2025) > f(2020) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$$

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \quad \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in [1,7] \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$$

f γνησίως φθίνουσα στο $[1,7]$

Άρα $A > 0$

Δ4. $f''(x) = 2x - 8$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 10x + 16) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} = -6 \cdot 2\sqrt{3} = -12\sqrt{3}$$